Dr. Prof. ERMANNO GIGLIO-TOS

Direttore dell'Istituto di Zoologia della R. Università di Torino

Della cariocinesi e dell'equilibrio stabile di due sferette mobili in una sfera



Estratto da: **Res biologicae**

Bollettino dell'Istituto di Zoologia della R. Università di Torino

(seguito al: Bollettino dei Musei

di Zoologia e di Anat. comp. della R. Università di Torino)



CIRIE'

G. CAPELLA, TIPOGRAFO-EDITORE

— 1926 —

RES BIOLOGICÆ **Vol. I - 1926 - N. 2**



Dr. Prof. Ermanno Giglio-Tos
Direttore dell'Istituto di Zoologia della R. Università di Torino

---

Della cariocinesi
e dell'equilibrio stabile di due sferette mobili in una sfera.

Ecco per quali fortuite circostanze fui tratto a dovermi occupare della soluzione di questo curioso problema.

Secondo una mia interpretazione della divisione della cellula o della cariocinesi (che risale del resto a 25 anni or sono) io sostengo che questo complesso fenomeno si riduca in ultima analisi alla formazione ed al graduale accrescimento di due sferette che diventeranno poi le future cellule figlie, dentro ad una sfera che è la cellula madre.

Questa, nel momento in cui nasce, è formata di particelle o biomori liberi, ma determinati per numero e qualità e aggregati fra di loro in ragione della loro natura chimica a formare un sistema unico. Durante il periodo erroneamente chiamato di riposo, perchè è invece quello nel quale la cellula manifesta la sua maggiore attività chimica, dovendo provvedere alla sua assimilazione, i biomori cambiano la loro reciproca posizione, poichè cambia la loro natura chimica, fino all'istante in cui tutti si sdoppiano a poco a poco in due altri biomori, così che il loro numero diventa doppio del primitivo. Di conseguenza, se la loro natura chimica è tale da formare due sistemi, i biomori si disporranno a poco a poco in modo da formare due sistemi nell'interno della stessa cellula e questo processo di orientamento si estenderà gradualmente a tutti i biomori della cellula madre finchè essi saranno tutti passati a far parte dei due sistemi, dando così origine a due cellule che risulteranno formate di tutti i

biomori che formavano la cellula madre i quali si saranno così distribuiti fra le due cellule figlie.

Se si ammette ora che, come la cellula madre, anche le cellule figlie abbiano forma sferica, l'inizio della formazione delle due cellule in seno alla cellula madre consisterà nel formarsi di due piccolissime sferette le quali andranno a mano a mano crescendo di volume perchè nuovi biomori si aggiungeranno sempre alla loro superficie, mentre le due sferette rimarranno sempre tangenti fra di loro.

La retta che congiunge i centri di queste sferette è ciò che in biologia si chiama l'asse del fuso.

Se è così, si capisce facilmente come i due centri delle sferette vadano sempre via via allontanandosi l'uno dall'altro a mano a mano che queste crescono di volume e ciò perchè, crescendo il volume, crescono i loro raggi e quindi si allunga l'asse del fuso che è la somma di questi.

La mia interpretazione, oltre che spiegare con la massima semplicità tutti i fenomeni della cariocinesi, spiega pure perchè il fuso cariocinetico sia mobilissimo nell'interno della cellula madre e quindi possa cambiare di direzione sotto l'azione di cause che obblighino le due sferette, sempre mobilissime, a cambiare di posizione, cosa che si constata realmente, ma di cui finora nessuna delle teorie proposte era riuscita a darcene ragione.

Ma un altro fenomeno, molto interessante, che la mia interpretazione spiega come corollario naturale di essa si è che il fuso cariocinetico senta l'azione della gravità, cosa anche questa che, sebbene sia stata constatata moltissime volte e si constati tuttora molto facilmente, tuttavia non era stato possibile spiegare con nessuna delle altre ipotesi.

Il fenomeno è del resto molto semplice.

Dato che le due sferette che hanno la stessa origine sieno di densità uguale fra di loro ma un po' maggiore di quella del liquido in cui sono immerse, queste sferette sotto l'azione della gravità tenderanno a cadere e, se sono di densità uguale, si comporteranno come i due piattelli di una bilancia e quindi la retta che congiunge i loro centri (l'asse del fuso) prenderà e conserverà la direzione orizzontale. Ed ecco allora semplicemente spiegato il fatto che si constata in moltissime cellule-uova che l'asse del primo fuso di divisione è sempre orizzontale e quindi che il 1° solco di segmentazione è sempre verticale.

Tutto ciò è una cosa, apparentemente così assiomatica che io non ho dubitato mai un solo istante che potesse essere altrimenti nè potevo sognarmi di essere almeno parzialmente in errore dal momento che questa credenza era condivisa da tutti i cultori delle scienze fisiche e matematiche e in perfetto accordo con i principi della meccanica.

Tuttavia volli controllare con i fatti se realmente le cose avvenivano come teoricamente era da tutti ammesso e ricorsi perciò ad esperimenti su uova di riccio di mare sottoposte all'esame in condizioni tali che esse fossero libere di dividersi in ogni direzione e nel tempo stesso io potessi misurare esattamente l'inclinazione sull'orizzonte dell'asse del fuso. Tali uova si prestano bene a simili esperimenti per varie ragioni: anzitutto perchè sono, come si dice, omolecitiche cioè presentano il loro vitello o tuorlo distribuito uniformemente in tutto l'uovo così che la divisione è uguale perchè non viene disturbata dal prevalere del vitello in una più che in un'altra parte dell'uovo e poi perchè l'uovo è trasparente al punto da permetterci di vederci dentro la direzione del fuso che ci appare appunto con quella figura caratteristica di bilanciere dove le due palle sono rappresentate dalle centrosfere che ci appaiono appunto come due sferette tangenti fra di loro. L'asse del fuso è precisamente rappresentato dalla retta che congiunge i centri di queste due centrosfere.

Com'era naturale, io mi aspettavo dunque in queste osservazioni di constatare appunto che sotto l'azione della gravità le due sferette si disponessero orizzontalmente ossia che la retta congiungente i loro centri (asse del fuso) assumesse la direzione orizzontale. Lascio immaginare quale non sia stato il mio stupore quando dovetti constatare che l'asse del fuso si presentava invece in tutte le uova inclinato sull'orizzonte di 45° precisi. Ripetei più volte l'esperimento mettendo le uova in posizioni diverse ma sempre ottenni lo stesso preciso risultato.

E allora la conclusione era evidente: la gravità agisce senza dubbio nel determinare il fenomeno perchè imprime all'asse del fuso una direzione costante, ma questa non è precisamente quella che i principi della meccanica ci hanno fin quì permesso di determinare teoricamente. Ma allora si presentava un dilemma: o non è vero che la carciocinesi consista, com'io credo, nel graduale accrescimento di due sferette nell'interno della cellula madre; oppure non è vero

che due sferette mobili in una sfera e tangenti fra di loro si dispongano sempre orizzontali, come finora si riteneva quasi come assioma.

La questione assumeva dunque per me un'importanza speciale perchè poteva diventare una prova del fuoco o pro' o contro la mia interpretazione.

Fu allora che invece di continuare a *jurare in verba magistri* ricorsi « provando e riprovando » all'esperimento.

Mi misi nelle condizioni migliori possibili onde evitare cause d'errore. Scelsi un palloncino di vetro (era necessario che fosse tale perchè per trasparenza si potesse vedere la direzione delle sfere nell'interno), verificai che fosse realmente sferico e introdussi in esso due sferette. A tal fine non credo che si possa trovare di meglio che le cosidette sferette per cuscinetti, perchè sono perfettamente sferiche, di materiale che si può considerare omogeneo, indeformabili perchè di acciaio durissimo e perfettamente liscie, sì che l'attrito si riduce al minimo possibile. Anzi spalmai ancora di olio la superficie interna del palloncino. Inoltre per maggior garanzia misurai anche il più esattamente possibile il diametro delle sferette e ne controllai con precisione il peso di ognuna di esse, per verificare che fossero ugualmente pesanti.

Con meraviglia constatai allora: 1°) che se le due sferette sono uguali e il loro diametro non oltrepassa un certo valore, esse si dispongono orizzontalmente ; 2°) che quando il loro diametro oltrepassa questo valore esse non si dispongono orizzontali ma inclinate di un certo grado sull'orizzonte ; 3°) che questa inclinazione va sempre aumentando con l'aumentare del diametro delle sferette purchè rimanga, s'intende, sempre costante quello della sfera in cui si trovano; 4°) che l'inclinazione massima sull'orizzonte è di 45° che si raggiunge quando le sferette abbiano un diametro uguale alla metà del diametro della sfera ; 5°) che la sferetta inferiore nel suo contatto con la sfera non sale mai più in su di un punto ugualmente distante dagli estremi dei diametri orizzontale e verticale, corrispondente ad un angolo al centro della sfera di 45°.

Ogni esperimento era eseguito in questo modo : collocavo le due sferette nell'interno del palloncino, poi le scuotevo fortemente in molte direzioni, quindi ponevo il palloncino in una posizione fissa e notavo la direzione assunta dalle sferette determinando il più esattamente possibile l'angolo formato con l'orizzonte dalla retta congiungente i centri delle sferette.

A maggior garanzia che l'equilibrio così assunto fosse veramente quello stabile, premendo sulla sferetta superiore le spostavo ambedue dalla loro posizione poi al cessare della pressione vedevo le due sferette ritornare nella posizione primitiva.

Ebbi così la prova palmare che le due sferette assumono sotto la azione della gravità una posizione affatto differente da quella che dovrebbero asssumere secondo i ben noti principi della meccanica, secondo i quali, come si sa, il centro di gravità del sistema delle due sferette (che nel caso che sieno uguali coincide col loro punto di contatto) dovrebbe trovarsi sulla verticale che passa per il centro della sfera e nel punto più basso possibile.

Di fronte a risultati sperimentali così sorprendenti che venivano insperati a confermare ancora meglio l'esattezza della mia interpretazione della cariocinesi perchè coincidono esattamente con quelli ottenuti nelle uova di riccio di mare, era naturale che io cercassi di darmene una spiegazione teorica e matematica.

Mi affrettai dunque a comunicare tali risultati sperimentali a persone più di me competenti in materia e quindi a cultori di meccanica, di matematica, di fisica, di ingegneria di mia conoscenza, ma da tutti, nessuno escluso, ebbi per risposta che essi dovevano essere errati perchè andavano contro ad un principio fondamentale quasi assiomatico della meccanica.

Molti tentarono di conciliare i risultati sperimentali con quelli teorici facendo intervenire chi l'attrito, chi la deformabilità del materiale usato, chi la non perfetta sfericità del palloncino e delle sferette. Ma contro questi tentativi di conciliazione stavano due fatti : 1°) che le discordanze tra i risultati teorici e quelli sperimentali erano troppo grandi perchè bastassero quei fattori a darne spiegazione soddisfacente ; 2°) che i risultati sperimentali erano proprio sempre i medesimi anche se si cambiava la natura della sfera e delle sferette.

Per coloro che poi si ostinassero a trovare in questi fattori secondari la spiegazione del fenomeno, posso ancora aggiungere che, ben lungi dall'esserne la causa efficiente ne sono invece un ostacolo, perchè quanto più si diminuisce l'attrito, quanto più è resistente e meno deformabile il materiale della sfera e delle sferette tanto più il fenomeno si manifesta spiccatamente, come me lo provarono ripetuti esperimenti.

Del resto chi voglia sperimentare può ricorrere al seguente si-

stema che taglia la testa al toro. In una sfera la più perfetta e la più liscia possibile, disponga in posizione orizzontale due sferette uguali la cui somma dei diametri sia appena inferiore al diametro della sfera e constaterà facilmente che non è possibile praticamente che esse mantengano tale posizione, sebbene teoricamente ciò dovesse avvenire, ma che o l'una o l'altra delle sferette (quale sia delle due a noi non importa vedere) cadrà in basso e spingerà l'altra in alto.

Qui, come si vede, non è più il caso di parlare di attrito, ma siamo di fronte ad un caso analogo a quello dell'uovo di Colombo od a quello di fare stare in equilibrio un ago sulla sua punta, fenomeno teoricamente possibile ma praticamente inattuabile.

Questa avversione unanime ad accogliere come buoni i risultati dei miei esperimenti, mentre per una parte mi confortava in quanto stava a dimostrare che non ero solo ad ignorare un fatto su cui nessuno, anche fra le persone più competenti, aveva finora neppur pensato a sollevare il minimo dubbio, per altra parte mi obbligava a ricercare da me stesso una soluzione del problema che fosse d'accordo con i fatti e me ne desse una spiegazione soddisfacente.

SOLUZIONE.

L'angolo A di spinta non è minore di 45°.

Sia una sfera cava di centro a e dentro ad essa due sferette di centro b, b' (Fig. 1).

Indichiamo con:

1°) R il raggio della sfera grande;

2°) r il raggio della sferetta di sinistra;

3°) r' il raggio della sferetta di destra;

4°) A l'angolo che fanno tra di loro le rette che congiungono i centri delle sferette col centro della sfera e che passano pure per il punto di contatto di queste con le sferette.

Il valore di quest'angolo è dipendente dal raggio delle sferette in rapporto con quello della sfera. Di fatto i 3 lati del triangolo abb' sono: $ab = R - r$; $ab' = R - r'$; $bb' = r + r'$; quindi:

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{R^2 - (r + r')}{(R - r)(R - r')}}$$

e nel caso che le due sferette sieno di ugual volume;

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{R^2 - 2r}{(R-r)^2}}$$

5°) B l'angolo che la retta congiungente i centri delle sferette fa con la retta che congiunge il centro a della sfera con quello b della sferetta di sinistra (inferiore) e che chiameremo angolo di spinta.

Il valore di quest'angolo dipenderà da quello di A e sarà:

$$\text{sen}\, B = \frac{R - r'}{r + r'} \text{sen}\, A$$

e nel caso che le due sferette sieno uguali sarà:

$$B = \frac{180 - A}{2}$$

6°) E l'angolo che fa col diametro verticale vv' la retta che congiunge il centro della sferetta di sinistra e quindi anche il suo punto di contatto con la sfera col centro a della sfera.

7°) E' l'angolo analogo per la sferetta di destra.

8°) F l'angolo che fa con l'orizzonte la retta congiungente i centri delle sferette fra di loro (asse del fuso cariocinetico).

Le due sferette tendono ognuna ad occupare una posizione tale che il loro centro si trovi sul diametro verticale della sfera. Ciò non essendo possibile esse si spingeranno l'una l'altra e la loro spinta sarà misurata da due fattori: 1°) il peso; 2°) il punto di contatto che esse hanno con la sfera.

Le due sferette vengono così a trovarsi su di uno speciale piano inclinato rappresentato dalla parete della sfera la cui inclinazione cambia per ogni punto ed è data dall'inclinazione che ha sull'orizzonte la tangente in quel punto. Quanto più il punto di contatto sarà distante dal punto più basso v della sfera tanto maggiore sarà la pendenza quindi la spinta che la sferetta ha per discendere. Il seno degli angoli E ed E' potrà misurare esattamente questa spinta.

Ciò premesso è naturale che l'equilibrio stabile sia raggiunto quando il prodotto del seno di E per il peso P della sferetta sia uguale a quello del seno di E' per il peso P' dell'altra sferetta:

$$\text{sen} EP = \text{sen} E'P'$$

Ne segue che se le due sferette sono uguali di volume e di peso sarà: $\text{sen} E = \text{sen} E'$, cioè i due angoli: E, E' saranno uguali quindi l'angolo A verrà diviso per metà dal diametro verticale vv' e il ba-

ricentro del sistema delle sferette che si troverà nel loro punto di contatto giacerà su questo diametro verticale.

Non è il caso dunque di indugiarsi oltre su tale questione sulla quale tutti sono d'accordo.

Occorre tuttavia richiamare l'attenzione su di un particolare che ci permetterà:

1°) di poter subito determinare esattamente la posizione che assumeranno le sferette nell'equilibrio stabile quando sono uguali;

2°) di valutare in certo modo la spinta utile che sollecita le sferette.

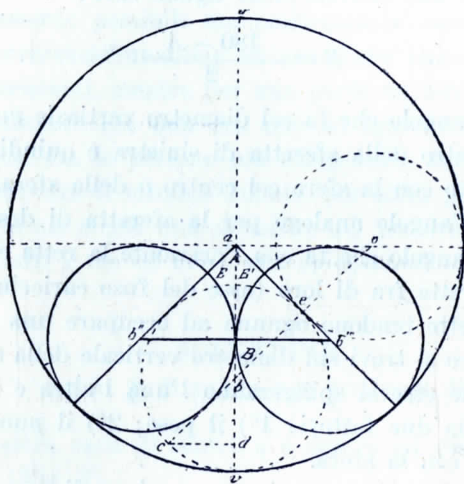


Fig. 1.

Se nella Fig. 1 si confrontano i due triangoli *bcd, abe* si vedrà che essi sono simili perchè l'angolo $cbd = abe$ perchè opposti al vertice; *bdc, aeb* sono retti; quindi anche l'angolo *bcd* sarà uguale all'angolo *bae*. Ma questo è la metà dell'angolo *A* e quindi uguale a *E* ed a *E'* quindi *bcd* è uguale a *E*. Ora il seno che misura l'angolo *bcd* è il segmento di retta *bd* che misura pure il coseno dell'angolo di spinta *B*. di qui ne segue che: il seno dell'angolo *E* è misurato dal coseno dell'angolo di spinta.

Così che conoscendo il valore dei raggi delle sferette e della sfera se ne deduce l'angolo *A* e da questo l'angolo di spinta *B* il cui coseno ci dà il seno dell'angolo *E* e quindi ci determina in modo preciso la posizione dei punti di contatto delle sferette con la sfera nell'equilibrio stabile.

La retta *b' bc* segna la direzione secondo cui si esercita la spinta delle sferette la quale naturalmente non si può fare che attraverso l'unico loro punto di contatto *e*. Questa spinta, qualunque essa sia, si decompone in due di cui una *bd* perpendicolare alla tangente alla sfera nel suo punto di contatto con la sferetta *b* e l'altra *cd* in direzione tangenziale. La componente *bd* è perduta perchè annullata dalla resistenza della parete della sfera, quella *cd* è invece la componente utile che sollecita a muoversi la sferetta *b*.

Dunque il valore della componente perduta (coseno dell'angolo di spinta) segna il valore di quella utile (seno del medesimo) perchè, come si è visto, il coseno dell'angolo di spinta è uguale al seno degli angoli E,E' nella posizione di equilibrio stabile.

Ciò premesso ne segue che tali due componenti cambiano rispettivamente di valore a seconda del valore dell'angolo di spinta B ossia a seconda della posizione del punto *e* di contatto delle sferette che segna il punto di applicazione della spinta. Così che si possono distinguere tre casi diversi:

1°) quello in cui l'angolo di spinta sia maggiore di 45°: in questo caso la spinta utile tangenziale ($\text{sen}B$) supera quella perduta ($\cos B$); e il raggio r delle sferette è minore di $0{,}4142\ R$.

2°) quello in cui l'angolo di spinta sarà uguale a 45°; in tal caso le due componenti sono uguali e il raggio delle sferette è $= 0{,}4142R$.

3°) quello in cui l'angolo di spinta sia inferiore a 45° nel quale la componente perduta ($\cos B$) è maggiore di quella utile ($\text{sen}B$) e il raggio delle sferette è maggiore di $0{,}4142R$.

Che il valore della spinta utile sia diverso col variare dell'angolo di spinta e quindi col variare della posizione del punto *e* di contatto delle sferette è cosa che si intuisce facilmente essendo noto che la direzione secondo cui si esercita una forza è uno dei fattori principali che influisce sul suo effetto.

Se la sferetta *b* fosse nella posizione di riposo in cui è rappresentata nella Fig. 1 ed avesse un diametro uguale al raggio della sfera e l'altra sferetta fosse uguale ad essa il punto di contatto delle sferette starebbe nel centro della sfera, l'angolo di spinta sarebbe uguale a 0 e le due sferette starebbero l'una verticalmente sull'altra in modo da avere i baricentri ambedue sul diametro verticale della sfera. E' evidente che allora la sferetta superiore graviterebbe tutta intera su quella inferiore col proprio peso ma non imprimerebbe a

questa nessun movimento perchè tutta la spinta derivata dal suo peso sarebbe rappresentata dalla spinta perduta, essendo nulla la spinta tangenziale.

Quanta importanza abbia questo fattore sanno benissimo del resto i giuocatori di biliardo i quali dalla direzione diversa della spinta che con la stecca imprimono alle palle ottengono effetti ben diversi.

B - L'angolo di spinta è minore di 45°

Occorre ora portare la nostra attenzione sulle due componenti della spinta.

Il valore di queste è dipendente da due fattori: uno che diremo ponderale; l'altro angolare.

Il fattore ponderale dipende dal peso e quindi dal volume e perciò dal raggio r delle sferette. Si comprende quindi che aumentando il valore di r aumenti correlativamente anche quello tanto dell'una quanto dell'altra componente. Ma poichè in questo caso si suppongono uguali in volume ed in densità le due sferette, questo fattore può essere trascurato perchè l'aumento di peso di una sferetta è controbilanciato esattamente da quello dell'altra.

Il fattore angolare è quello invece che dipende dall'angolo di spinta il quale agisce sul valore delle due componenti in modo proprio opposto. Di fatto, siccome una delle componenti, quella tangenziale utile, è rappresentata dal seno dell'angolo di spinta, il suo valore andrà diminuendo col diminuire di esso mentre l'altra componente, quella che va perduta, essendo rappresentata dal coseno dello stesso angolo di spinta andrà correlativamente crescendo col diminuire di tale angolo. Si comprende allora come esisterà una condizione di cose in cui il valore della spinta perduta sarà uguale a quello della spinta utile. Questa condizione si realizzerà, come si è visto, quando l'angolo di spinta sia di 45°, perchè allora il seno di quest'angolo è uguale al suo coseno.

Oltrepassato però questo limite la componente perduta andrà aumentando di valore mentre diminuirà quello della componente tangenziale così che il risultato sarà che di tutta la spinta esercitata da una sferetta sull'altra, una parte andrà realmente perduta e questa sarà rappresentata dalla differenza tra il valore della componente perduta e il valore suo quando l'angolo di spinta è di 45° e quindi tra il valore del coseno dell'angolo di spinta e quello del coseno di 45°.

Supponiamo per es. che il raggio r delle sferette sia 0,45 R. In tal caso l'angolo A sarà di 110°, quindi l'angolo di spinta B sarà di 35°. Il valore del coseno di quest'angolo è 0,81915. La differenza tra 0,81915 e 0,70711 = 0,11204 rappresenterà la parte della spinta che va veramente perduta. Ciò equivale a dire in altri termini che di tutto il peso della sferetta una porzione rappresentata da questa differenza 0,11204 graviterà semplicemente sull'altra sferetta senza imprimere ad essa nessuna spinta tangenziale così che questa si muo-

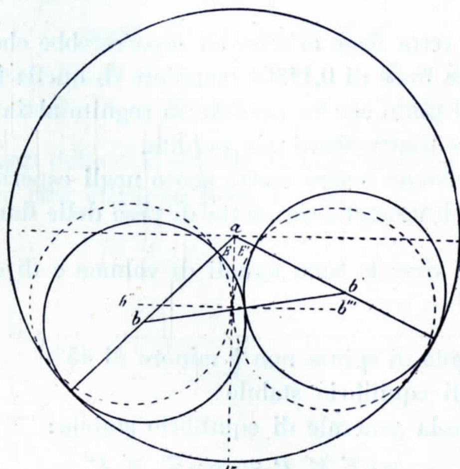


Fig. 2.

verà e salirà lungo la parete della sfera sollecitata solamente dalla componente tangenziale il cui valore rimarrà costantemente rappresentato dal coseno di un angolo di 45°.

Stando a quanto prima si è dimostrato che il coseno dell'angolo di spinta rappresenta il seno dell'angolo E nella posizione di equilibrio stabile delle sferette ne seguirebbe in questo caso che il seno dell'angolo E dovrebbe essere uguale al coseno di 35° e quindi l'angolo E dovrebbe essere di 55° e così l'angolo E', ragione per cui la retta congiungente i centri delle sferette sarebbe orizzontale come nei casi in cui il raggio delle sferette non sia maggiore di 0,4142 R e quindi l'angolo di spinta non sia minore di 45°.

Ma siccome la spinta totale, a causa appunto di questo fattore angolare, ha perduto 0,11204 del suo valore, la sferetta inferiore sarà sollecitata a salire di tanto di quanto è il valore del coseno dell'angolo di 35° meno il valore di questa perdita perciò sarà:

$$\text{sen}E = \cos 35° - (\cos 35° - \cos 45°) = \cos 45°$$

ossia la sferetta inferiore non potrà mai ricevere una spinta maggiore di quella rappresentata dal coseno di 45° e perciò il seno dell'angolo E nella posizione di equilibrio stabile sarà sempre uguale al coseno di 45°. Si comprende allora come l'angolo E', sarà uguale all'angolo A meno E e la retta congiungente i centri delle due sferette nella posizione di equilibrio stabile non sarà orizzontale ma inclinata sull'orizzonte di un angolo F che sarà uguale a 90° - (E + B). (Figura 2).

Affinchè tale retta fosse orizzontale occorrerebbe che il peso della sferetta superiore fosse di 0,11204 maggiore di quella inferiore ossia maggiore di quel tanto che va perduto in seguito al fattore angolare sì da compensare esattamente tale perdita.

Di questo conviene tenere esatto conto negli esperimenti ed assicurarsi perciò dell'uguaglianza esatta di peso delle due sferette.

I. — Le due sferette sono uguali di volume e di densità quindi di peso:

a) L'angolo di spinta non è minore di 45°.

Condizione di equilibrio stabile:

Data la formola generale di equilibrio stabile:

$$\text{sen}E \times P = \text{sen}E' \times P'$$

essendo $P = P'$ sarà: $E = E'$

ed il valore di E sarà: $\text{sen}E = \cos B$

b) L'angolo di spinta è minore di 45°.

Condizione di equilibrio stabile:

$$\text{sen}E = \cos B - (\cos B - \cos 45°) = \cos 45°.$$

1° esempio: Sia il raggio della sfera $R = 1$; il raggio delle sferette $r = 0,45$.

Sarà: $A = 110°$ ca. $B = 35°$ ca.

Se la spinta non subisse nessuna perdita sarebbe:

$$\text{sen}E = \text{sen}\,\frac{110°}{2} = \text{sen}55° = \cos 35° = 0,81915.$$

Siccome l'angolo di spinta è di 35° sarà:

$$\text{sen}E = 0,81915 - (0,81915 - 0,70711) = 0,70711$$

$$F = 90° - (45° + 35°) = 10° \text{ (Fig. 2).}$$

2° esempio: Sia $R = 1$; $r = 0,50$.

$$\text{Sarà}: A = 180°; \quad B = 0°$$

$$\text{sen}E = 1 - (1 - 0,70711) = 0,70711$$

$$F = 90° - 45° = 45°.$$

2°) - Le due sferette sono di densità uguali ma di volume diverso:

a) L'angolo di spinta non è minore di 45°.

I pesi delle sferette saranno proporzionali ai volumi ossia ai cubi dei raggi delle sferette, quindi:

$$\text{sen}E \times r^3 = \text{sen}E' \times r'^3.$$

1° esempio: Sia $R = 1$; $r = 0,44$; $r' = 0,22$.

$$\text{Sarà}: A = 54°,40'; \quad B = 74°,20'.$$

Poichè i raggi delle due sferette stanno come 1 a 2 i loro volumi e quindi i loro pesi staranno come 1 a 8.

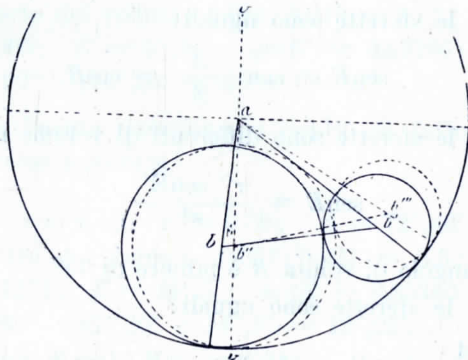


Fig. 3.

Perchè l'equilibrio esista occorrerà che il valore del seno dell'angolo E sia 1/8 di quello di E'.

Nel caso presente l'angolo E sarà di ca. 5°,25' il cui seno è 0,09440 che è ca. 1/8 di 0,75756 che corrisponde ad un angolo E' di ca. 49°,15'.

$$F = 90° - (5°,25' + 74°,20') = 10°,15' \text{ (Fig. 3).}$$

2° esempio: Sia $R = 1$; $r = 0,5$; $r' = 0,45$.

$$\text{Sarà}: A = 129°,40'; \quad B = 26°,30'.$$

Il rapporto tra i volumi è: 0,125 a 0,091 ossia 1,37 : 1.

Se l'angolo di spinta non fosse minore di 45° i seni di E e di E' dovrebbero stare fra di loro in questo rapporto e perciò allo incirca

sarebbe: sen$E$ = 0,73135 e senE' = 0,99182 corrispondenti relativamente a 47° ca. e 82°,40′.

Ma essendo B di 26°,30′ il suo coseno è: 0,89493 da cui deducendo cos45° = 0,70711 si ottiene 0,18782 che rappresenta la perdita di spinta.

Sottraendo dal seno di E questo valore si otterrà il seno reale di E nell'equilibrio stabile.

$$\text{sen}E = 0{,}73135 - 0{,}18782 = 0{,}54353$$

cui corrisponde un angolo di 33° ca. L'angolo E' sarà dunque 129°,40′ - 33° = 96°,40′.

$$F = 90° - (33° + 26°{,}30') = 30°{,}30'.$$

Riassumendo in breve le condizioni di equilibrio stabile delle due sferette si avrà:

A) Se l'angolo di spinta B non è minore di 45°.

1°) Se le sferette sono uguali:

$$\text{sen}E = \text{sen}\,\frac{A}{2} = \cos B.$$

2°) Se le sferette sono differenti di volume non di densità:

$$\text{sen}E = \frac{r'^3\ \text{sen}E'}{r^3}$$

B) Se l'angolo di spinta B è minore di 45°.

1°) Se le sferette sono uguali:

$$\text{sen}E = \text{sen}\,\frac{A}{2} - (\cos B - \cos 45°) = \cos B - (\cos B - \cos 45°) = 0{,}70711$$

2°) Se le sferette sono di volume diverso non di densità:

$$\text{sen}E = \frac{r'^3\ \text{sen}E'}{r^3} - (\cos B - \cos 45°).$$

Siccome in un mio precedente lavoro (Die Wirkung der Schwerkraft auf die Richtung der ersten Furchungsspindel im Ei des Seeigels, in: Arch. f. Entwicklungsmech. d. Organismen, Bd. 107 - 1925 pag. 186 e seg.) io ho pubblicato i risultati di alcuni esperimenti senza però preoccuparmi della loro soluzione teorica, sarà ora molto interessante verificare se i risultati sperimentali coincidono con quelli che si possono dedurre teoricamente dalla nostra soluzione.

(I numeri in margine si riferiscono a quelli del lavoro suddetto).

1) I raggi delle sferette sono tutti minori di 0,4142 il raggio R della sfera quindi la retta che congiunge i loro centri si dispone orizzontale.

2) Il raggio della sfera è 57 mm. quello delle sferette mm. 25,5. Riducendo all'unità si ottiene:

$R = 1$; $r = 0{,}45$ ca.

$A = 110°$ $B = 35°$ sen$E = 0{,}70711$ $E = 45°$.

$F = 90° - (45° + 35°) = 10°$.

L'esperimento ha dato: $F = 15°$.

3) $R = 1$; $r = 0{,}5$; $A = 180°$; $B = 9°$ sen$E = 0{,}70711$ $E = 45°$.

$F = 90° - 45° = 45°$.

L'esperimento ha precisamente dato un'inclinazione di 45°.

4) $R = 1$; $r = 0{,}45$; $r' = 0{,}22$; $A = 58°{,}40'$; $B = 76°{,}50'$.

Rapporto dei volumi: $0{,}091 : 0{,}010 = 9 : 1$.

sen$E = 0{,}09005$; $E = 5°{,}10'$; sen$E' = 0{,}89386$; $E' = 53°{,}30'$.

$F = 90° - (76°{,}50' + 5°{,}10') = 8°$.

Nell'esperimento quest'angolo risultò di fatto troppo piccolo perchè si potesse misurare.

5) $R = 1$; $r = 0{,}45$; $r' = 0{,}30$; $A = 72°{,}40'$; $B = 62°{,}20'$.

Rapporto dei volumi: $0{,}091 : 0{,}027 = 3{,}5 : 1$.

sen$E = 0{,}24333$; $E = 14°{,}5'$; sen$E' = 0{,}85340$ $E' = 58°{,}35'$.

$F = 90° - (62°{,}20' + 14°{,}5') = 13°{,}25'$.

L'esperimento ha dato per F 11°.

6) $R = 1$; $r = 0{,}45$; $r' = 0{,}33$; $A = 111°{,}30'$; $B = 53°{,}10'$.

Rapporto dei volumi: $0{,}091 : 0{,}035 = 2{,}53 : 1$.

sen$E = 0{,}39341$; $E = 23°{,}20'$; sen$E' = 0{,}99949$; $E' = 88°{,}10'$.

$F = 90° - (53°{,}10' + 23°{,}20') = 13°{,}30'$.

L'esperimento ha dato: $F = 13°$.

7) $R = 1$; $r = 0{,}5$; $r' = 0{,}22$; $A = 64°$; $B = 76°$.

Rapporto dei volumi: $0{,}125 : 0{,}010 = 12{,}5 : 1$.

sen$E = 0{,}06976$; $E = 4°$; sen$E' = 0{,}86603$; $E' = 60°$.

$F = 90° - (76° + 4°) = 10°$.

L'esperimento ha dato: $F = 13°$.

8) $R = 1$; $r = 0,5$; $r' = 0,30$; $A = 82°$; $B = 59°$.
Rapporto dei volumi: 0,125 : 0.027 = 4,63 : 1.
sen$E$ = 0,20791; $E = 12°$; senE' = 0,93969; $E' = 70°$.
$F = 90° - (59° + 12°) = 19°$.
L'esperimento ha dato: $F = 15°$.

9) $R = 1$; $r = 0,5$; $r' = 0,33$; $A = 90°$; $B = 53°,10'$.
Rapporto dei volumi: 0,125 : 0,935 = 3,5 : 1.
sen$E$ = 0,27564; $E = 16°$; senE' = 0,96126; $E' = 74°$.
$F = 90° - (53°,10' + 16°) = 20°,50'$.
L'esperimento ha dato: $F = 19°$.

10) $R = 1$; $r = 0,5$; $r' = 0,45$; $A = 129°,40'$; $B = 26°,30'$.
Rapporto dei volumi: 0,125 : 0,91 = 1,37 : 1.
sen$E$ = 0,73135; $E = 47°$; senE' = 0,99182; $E' = 82°,40'$.
sen$E$ = 0,73135 - (cos$B$ - cos45°) = 0,73135 —
(0,89493 - 0,70711) = 0,54353 cui corrisp. un angolo di 33°; $E = 33°$.
$F = 90° - (26°,30' + 33°) = 30°,30'$.
L'esperimento ha dato: $F = 30°$.

Ora, se si tien conto che per una parte non è possibile negli esperimenti procedere alla misurazione degli angoli con tutta la precisione voluta, specialmente quando si tratta di angoli molto piccoli e per altra parte che nei calcoli teorici esistono molte cause di errore dovuti sopratutto al calcolo del valore dei raggi, degli angoli, del valore dei seni e dei coseni, dei rapporti dei volumi ecc. che si è costretti a fare solo con una certa approssimazione, la coincidenza notevole dei risultati teorici qui sopra riferiti con quelli sperimentali assume certo un significato importante, tanto più quando si tenga conto che i risultati sperimentali hanno preceduto i teorici e quindi non hanno potuto essere influenzati da qualche idea preconcetta.

Tale coincidenza sta naturalmente a dimostrare che la soluzione teorica quì proposta è dunque molto probabilmente la vera.

Mi piace prima di finire richiamare l'attenzione su di un fenomeno che si osserva durante gli esperimenti e che non è privo di importanza per il controllo dell'esattezza della soluzione.

Quando si esperimenta su sferette dello stesso volume e densità e si constata che la retta che congiunge i centri delle sferette è inclinata

sull'orizzonte, si può, esercitando una pressione in senso verticale su quella superiore, spostare verso l'alto quella inferiore. Il che si comprende facilmente poichè per tal modo si aumenta la spinta della sferetta superiore. Al cessare della pressione però la sferetta inferiore ritorna nella sua primitiva posizione spingendo in alto la superiore il che sta a dimostrare che questa è veramente la sua posizione di equilibrio stabile, e che la posizione non è dovuta all'attrito.

La cosa interessante a notarsi si è che un simile spostamento verso l'alto della sferetta inferiore ha luogo solamente quando la somma dei diametri delle due sferette non è uguale al diametro della sfera.

Quando invece questa somma è uguale a questo diametro allora le due sferette, per quanto si prema sulla superiore, non si spostano più ma rimangono fisse e come incastrate nella sfera in cui si trovano. Continuando la pressione e aumentandola, se la sfera non è proprio robusta, si rompe precisamente nel punto in cui è a contatto con la sferetta inferiore, cioè corrispondente ad un angolo coll'orizzonte di 45°.

La spiegazione di questo fenomeno è evidente.

La spinta si esercita da una sferetta all'altra nella direzione della retta che congiunge i loro centri. Ora questa retta non è mai perpendicolare alla tangente alla sfera nel punto in cui la sferetta la tocca se non nel caso che essa sia inclinata di 45° sull'orizzonte cioè passi per il centro della sfera, il che avviene solo quando la somma dei diametri delle sferette sia uguale al diametro della sfera. Così essendo si capisce come in tutti gli altri casi qualunque pressione si eserciti sulla sferetta superiore e si trasmetta all'inferiore secondo tale direzione potrà sempre avere una componente tangenziale che è precisamente quella che spinge in alto la sferetta inferiore. Mentre invece nel caso in cui la somma dei diametri delle sferette è uguale al diametro della sfera, tutta la spinta si trasmette intera nel punto di contatto senza che sia possibile la sua scomposizione in una spinta tangenziale.

Conclusione.

La soluzione ora esposta ci permette di darci una spiegazione razionale e di determinare in modo matematicamente esatto la posizione di equilibrio stabile di due sferette in una sfera. I risultati teorici che se ne ottengono coincidono esattamente con quelli sperimentali.

1°) Se le due sferette sono uguali e il loro diametro non oltrepassa il valore di 0,4142 il diametro della sfera le due sferette si dispongono sempre sotto l'azione della gravità in modo che la retta congiungente i loro centri sia orizzontale.

2°) Se le due sferette sono uguali e il loro diametro oltrepassa il valore di 0,4142 il diametro della sfera la retta congiungente i loro centri sarà più o meno inclinata sull'orizzonte.

3°) Tale inclinazione raggiungerà il suo massimo valore di 45° sull'orizzonte quando la somma dei diametri delle sferette sia uguale al diametro della sfera.

4°) Se le due sferette sono uguali la sferetta inferiore non può mai sollevarsi nella sfera al di sopra di un punto di contatto con essa che faccia con la verticale al centro della sfera un angolo superiore a 45°.

5°) Se le due sferette sono disuguali di peso la retta congiungente i loro centri potrà avere inclinazione varia sull'orizzonte dipendente dal loro peso.

Questa soluzione dovrà in ogni modo essere considerata come un semplice tentativo per mettere d'accordo i risultati sperimentali con quelli teorici. Io spero e sono convinto che altri, ben più di me provetti nella matematica, potranno trovare altre soluzioni più soddisfacenti, purchè non si ostinino a voler vedere nei risultati pratici una contraddizione con quelli teorici, e sentenziare che il fenomeno non è possibile semplicemente perchè è in urto con i principi fondamentali della meccanica.

Mi sia concesso di ricordare a questo proposito che non di rado queste contraddizioni sono più apparenti che reali perchè dipendono solo o dall'ignoranza di alcuni fattori o dall'imperfetta loro valutazione nella produzione del fenomeno.

Valga un esempio.

Supponiamo che una persona sia a conoscenza del principio generale della gravità secondo il quale tutti i corpi attratti dalla Terra devono cadere dall'alto verso il basso e sia ignaro affatto della differenza nella densità dei gas. Se a questa persona si dicesse che un pallone aerostatico, invece che cadere in basso, come vorrebbe la legge generale che essa solo conosce, sale verso l'alto, esclamerebbe senza dubbio che ciò non è possibile perchè contrario al principio fondamentale della gravità. Ecco un fenomeno che appare in contraddizione con i principi che sono a sua conoscenza. Ma se questa persona

viene in possesso della nozione della differenza di densità dei gas e tiene conto nello studio del fenomeno anche di questo fattore, prima trascurato, potrà allora constatare che non solo esso non è in contraddizione col principio della gravità ma che anzi viene a confermarlo.

E così nel caso presente un fatto che a tutta prima pareva contrario alla mia interpretazione della cariocinesi ne diventa invece una delle prove più convincenti e più incontestabili !

RIASSUNTO.

L'A. avendo constatato che nelle uova di Riccio di mare (omolecitiche, a segmentazione totale ed uguale) il primo fuso di segmentazione subisce senza dubbio l'azione della gravità perchè prende costantemente la stessa direzione se altre cause non glielo impediscono, nota nel tempo stesso con somma sua meraviglia che tale fuso, invece di disporsi parallelamente all'orizzonte, come dovrebbe avvenire secondo un suo modo di interpretare la cariocinesi, si dispone sempre in maniera che il suo asse sia inclinato di 45° sull'orizzonte. Questo fatto lo porta a verificare sperimentalmente quale sia la posizione che sotto l'azione della gravità assumono due sferette mobili in una sfera quando si trovano in equilibrio stabile, e, in apparente contraddizione con tutti i principi fondamentali della meccanica, constata che non sempre le sferette si dispongono in modo che la retta che ne congiunge i centri sia orizzontale e che pertanto il baricentro comune al sistema si trovi sul diametro verticale della sfera, ma che la loro posizione è in stretto rapporto col diametro delle sferette rispetto a quello della sfera. Se le sferette sono uguali di volume e di peso la loro posizione è orizzontale fino a tanto che il loro diametro non superi il valore di 0,4142 il diametro della sfera in cui si trovano, ma esse prendono una posizione inclinata sull'orizzonte quando il loro diametro superi questo valore, e tale inclinazione raggiunge il suo massimo valore di 45° quando la somma dei diametri delle due sferette sia uguale al diametro della sfera.

Di fronte a questo fatto che appare in contraddizione con i principi della meccanica l'A. espone una soluzione matematica e teorica del curioso fenomeno dove ottiene risultati teorici che coincidono con

quelli ottenuti sperimentalmente e già esposti in un suo precedente lavoro.

Per tal modo egli ottiene in un fatto che pareva contrario alla sua interpretazione una delle prove più inconfutabili e favorevoli.

Torino, 1° gennaio 1926.





Pubblicato il 10 aprile 1926.

Prof. Ermanno Giglio-Tos, Direttore responsabile.

Stabilimento Tipografico G. Capella — Ciriè.